ENSAIT

École Nationale Supérieure
des Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE A - 1999

EPREUVE de MATHEMATIQUES II

Durée 2 heures

(tous les candidats)

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées

L'usage des calculatrices est interdit

$\mathfrak{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

On note $\mathfrak{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $B = \{1, X, X^2 \ldots, X^n\}$ sa base canonique.

Etant donné une famille de $(n+1)$ réels distincts $a_0 \langle a_1 \langle a_2 \langle \ldots \langle a_n$, on lui associe les polynômes $L_0, L_1, L_2 \ldots L_n$ de $\mathfrak{R}_n[X]$ tels que :

$\forall\ j \in \{0,1,2,..n\} - \{i\} \quad L_i(a_j) = 0$

et $L_i(a_i) = 1$

On note enfin A la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les composantes dans la base B des vecteurs $L_0, L_1, L_2, .. L_n$.

I - On prend $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$.

1) Donner L_0, L_1, L_2.
Montrer que $\{L_0, L_1, L_2\}$ est une base de $\Re_2[X]$.
Quelles sont les composantes d'un polynôme P de $\Re_2[X]$ dans cette base $\{L_0, L_1, L_2\}$?

2) Former la matrice de changement de base de $B = \{1, X, X^2\}$ à $B' = \{L_0, L_1, L_2\}$.
Montrer qu'elle est diagonalisable, qu'elle admet une valeur propre entière, déterminer l'espace propre associé.

3) Déterminer les polynômes P de $\Re_2[X]$ tels que
$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$

II - Retour au cas général

1) Montrer que $B' = \{L_0, L_1, L_2 \ \ldots \ L_n\}$ est une base de $\Re_n[X]$.
Indiquer les composantes sur la base B' d'un polynôme P quelconque de $\Re_n[X]$.

2) Montrer que A est inversible, calculer son inverse.

3) Montrer que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.
En déduire que la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre ligne de A est nulle.

III – Etude du cas $a_0 = 0$

1) Montrer que la matrice A admet $\lambda = 1$ pour valeur propre.

2) Montrer qu'il existe des polynômes P de $\Re_n[X]$, différents du polynôme nul tels que : $P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\, X^i$

IV – Etude du cas $a_0 = 1$

Montrer que la somme des éléments de la première colonne de A est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre colonne de A est nulle.

V – Etude du cas $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \ldots \qquad a_n = n$

On note dorénavant :
$L_{i,p}$ le polynôme de $\Re_p[X]$ tel que

$$\forall\ j \in \{0,1,..p\} - \{i\} \qquad L_{i,p}(j) = 0$$

et $L_{i,p}(i) = 1$

Et on convient que $L_{0,0} = 1$.

1) Montrer que $B'' = \{L_{0,0}, L_{1,1}, L_{2,2} \ \ldots\ L_{n,n}\}$ est une base de $\Re_n[X]$.

Soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_{k,k}$, déterminer ses racines.

2) a) Ecrire la matrice de changement de base de

$$B' = \{L_{0,n}, L_{1,n}, L_{2,n} \ \ldots\ L_{n,n}\} \text{ à } B''$$

b) Montrer que l'on peut écrire la matrice A comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure.

c) Effectuer tous les calculs du V 2) b) pour $n = 2, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$